

■文字式のつづき■（大問1）

Step2：因数分解のルール

因数分解は展開の逆、なので、理想的には展開の問題にたくさん慣れていく過程で因数分解もスムーズできるようになっていくことがいいと思うが、そこまでは時間も手間もかかるので、解き方をなぞって因数分解を解きつつ、展開も意識しつつで。

※ 展開と因数分解の違い（正反対の動きであることを確認する）

$$\begin{array}{ccc} (x+3)(x+2) & \xrightarrow{\text{展開}} & x^2 + 5x + 6 \\ = x^2 + 5x + 6 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x^2 + 5x + 6 & \xrightarrow{\text{因数分解}} & (x+3)(x+2) \\ = (x+3)(x+2) & & \end{array}$$

<そもそも因数分解って？>

因数分解とは、ある数や式を「因数に分解する」ということ。小学校で「素因数分解」という言葉を聞いていれば、「素数のみで因数に分解する＝素因数分解」なので、少しイメージが湧くかもしれない。

ex.) 素因数分解の例

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

ここで出てくる数字、「2」「2」「2」「3」「3」「5」をそれぞれ「因数」と呼ぶ。この「2」「3」「5」はそれぞれ「素数」なので、これを素因数分解と言います。

なので、 $360 = 2^2 \times 6 \times 15$ などになると、「素因数分解」ではなく「因数分解」になる（＝「2」は素数だが、「6」や「15」は素数ではないため）。

数字の因数分解は上記のような感じでまだ理解しやすいが、文字式の因数分解は少し複雑。強いて言うなら、例えば $60 = (8+4)(2+3)$ みたいな感じになるのだが、式を因数分解するので、慣れるまでは多少強引に進めていくことになります。

とりあえず、よくある答えの形を意識しながら、解答が出せるように計算していきましょう。

● 因数分解（基礎）の考え方。

例 1 「 $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$ 」 こういう形の問題が基本の形。

- ① 答えはこの形（ $= (x + \circ)(x + \bullet)$ ）になると推察して考えを進める。
- ② 一番左の x^2 のところは、左右の（ ）の前の $x \times x = x^2$ で一致するように。
左右の（ ）の右側の数字で掛け算して「6」になるので、数字の組み合わせは「2と3（ $\rightarrow 3 \times 2 = 6$ ）」か「1と6か（ $\rightarrow 1 \times 6 = 6$ ）」の2択。
※ この数字によっては、もっと組み合わせが増える場合もある。
- ③ さらに真ん中の数字（ $5x$ の部分）は足し算で出すので、 $5 = 3 + 2$ だから「2と3」の組み合わせが正解になる。
※ ここが「-」の時もあるので、その場合は組み合わせる数字に正負の符号の考慮もする。
ex.) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$
- ④ ということで、 $x^2 + 5x + 6$ の答えは $(x + 3)(x + 2)$ となります。

例 1 のやり方は丁寧に説明するためのものなので、現実的には次の例 2 のやり方で慣れていくのが良いでしょう。

例 2 $x^2 - 2x - 15$

「かけて -15 、足して -2 」になるような数字の組み合わせを考える。
かけて -15 になるのは、 $(1, 15)$ $(3, 5)$ の組み合わせで、どちらかが「-」
その組み合わせの中で足して -2 になるのは、 $(3, -5)$ なので、
 $= (x + 3)(x - 5)$ となる。

（ここからは高認レベル）

例 3 $3x^2 + x - 14 = (\blacksquare x + \blacksquare)(x - \blacksquare)$

「 x^2 」のところに係数が付いていて「 $3x^2$ 」となっているので、少しややこしい。

一般的には「たすき掛け」と言われるやり方がよく使われますが、今回は（これもこれでややこしいのですが）、問題と解答の空欄の形から答えに迫っていくやり方で解いていこうと思います。

例3 $3x^2 + x - 14 = (\blacksquare x + \blacksquare)(x - \blacksquare)$ ⇨ 答えの形からヒントをもらおう

(i) $(\textcircled{1}x + \blacksquare)(x - \blacksquare) = 3x^2 + x - 14$

$\textcircled{1}x \times x = 3x^2$ なので、 $\textcircled{1} = 3$

(ii) $(3x + \textcircled{2})(x - \textcircled{3}) = 3x^2 + x - 14$

$(+\textcircled{2}) \times (-\textcircled{3}) = -14$ なので

$(\textcircled{2}, \textcircled{3})$ は $(1, 14)$ か $(2, 7)$

(iii) $(3x + \textcircled{2})(x - \textcircled{3}) = 3x^2 + x - 14$

$3x \times (-\textcircled{3}) + \textcircled{2} \times x = +x$ なので、
 $-3 \times \textcircled{3} + \textcircled{2} = 1$ になるペアを探ると
 $-3 \times 2 + 7 = 1$ で成立したので

$(\textcircled{2}, \textcircled{3}) = (7, 2)$

※ ここは少し面倒ですが、高認試験ではそこまで(ii)で出てくる組み合わせはそこまで多くないので、それぞれ当てはめてみましょう。

(iv) したがって答えは $\underline{3x^2 + x - 14 = (3x + 7)(x - 2)}$

例4 $(x + 3)^2 + 2(x + 3)$

〈解法1 置き換え〉

$(x + 3)$ が2回登場している。そして、これは、今まで x のあった位置。

→ 「 $(x + 3)^2 + 2(x + 3)$ 」と「 $X^2 + 2X$ 」を見比べてみよう。

ということで、 $(x + 3)$ を A と置きなおしてみると、

$(x + 3)^2 + 2(x + 3) = A^2 + 2A$ となり、

$A^2 + 2A = A(A + 2)$ と因数分解できた。

(この共通因子でくくる形の因数分解も忘れやすいので注意)

この A をもとの $(x + 3)$ に戻すと

$A(A + 2) = (x + 3)((x + 3) + 2) = (x + 3)(x + 5)$

したがって答えは、 $\underline{(x + 3)^2 + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 5)}$

⇨ 置き換えが難しいって方は…

〈解法2 気合で解いていく〉

まず展開して、整理してから、因数分解に進んでいきます。

面倒は面倒ですが、地道に進んでいけばいいだけなので、新しいことをいろいろ覚えるよりも、気合で解き進めていく方が性に合う方も多いのではないのでしょうか。

$$\begin{aligned}
 & (x+3)^2 + 2(x+3) \\
 &= (x+3)(x+3) + 2(x+3) \\
 &= x^2 + 3x + 3x + 9 + 2x + 6 \quad \curvearrowright \text{展開} \\
 &= x^2 + 8x + 15 \quad \curvearrowright \text{整理} \\
 &= (x+3)(x+5) \quad \curvearrowright \text{因数分解}
 \end{aligned}$$

類題 $(x-1)^2 - 2(x-1) - 8$ を因数分解せよ

<解法1 置き換え>

$$x-1 = A \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}
 (x-1)^2 - 2(x-1) - 8 &= A^2 - 2A - 8 \\
 &= (A-4)(A+2) \\
 &= ((x-1)+2)((x-1)-4) \\
 &= (x+1)(x-5)
 \end{aligned}$$

<解法2 気合>

$$\begin{aligned}
 & (x-1)^2 - 2(x-1) - 8 \\
 &= (x-1)(x-1) - 2(x-1) - 8 \\
 &= x^2 - x - x + 1 - 2x + 2 - 8 \\
 &= x^2 - 4x - 5 \\
 &= (x+1)(x-5)
 \end{aligned}$$

☞ わからない方は、因数分解のルールから再確認してください！