【高認特化問題集】数学

―――――――――第６回――――――――――

■二次関数■

「関数」。２つの関係する数を式にしたもの。そして、その式は座標に図を描くことができる。

例えば、時速 40ｋｍの一定の速度で走る車は、１時間走ると 40ｋｍ、２時間走ると 80ｋｍ、３時間走ると 120ｋｍ進むことができる。この走る時間数と走った距離の２つの数字には関係があるように見える。そして、この２つの数字は互いに関係しあって（関数）変わっていく（＝これを「変数」という）。

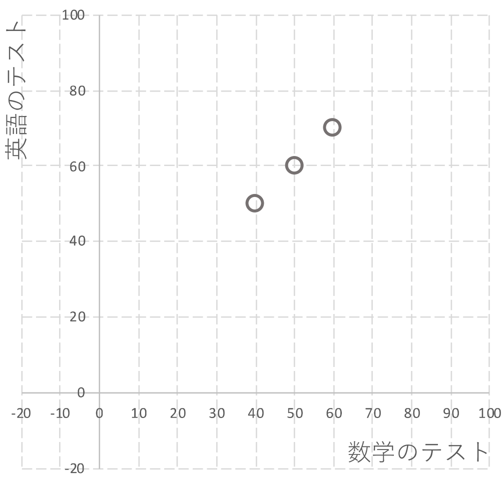
この「走る時間数（を ｘ として）」、「走った距離（を ｙ とした）」の２つの関係を見ると、$y = 40x$ という関係になっていることが分かる（この式のような関係は一次関数という）。そして「 ｘ （走る時間数）」を横軸、「 ｙ （走った距離）」を縦軸においたとき、１時間走ると 40ｋｍ（＝ ｘ が１のとき ｙ が 40）、２時間走ると 80ｋｍ（＝ ｘ が２のとき ｙ が 80）、３時間走ると 120ｋｍ（＝ ｘ が３のとき ｙ が 120）などと点を繋げていくと図を描ける。

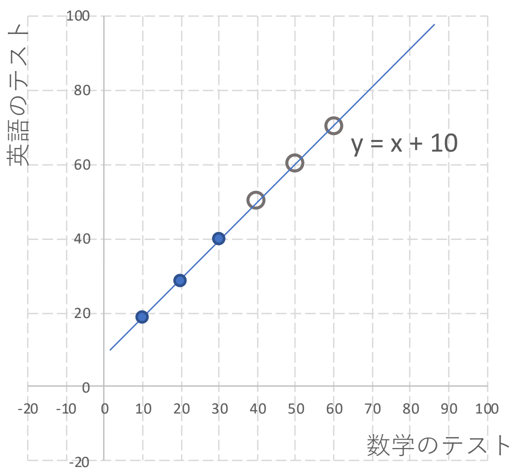
文章 → 関数の式 → グラフ の繋がりが見えると、数学は結構いい感じで理解できる感じがするので頑張って欲しいところ。

6-1：これまでやったことを関数に近づけて考えてみる

◇◇2 軸のグラフとは◇◇

例１：相関係数を思い出そう





２つの事項がどれぐらい関係があるかを数値化したもの、相関係数。相関係数が最大（１）のとき、右のグラフのように１列に並ぶという話があったと思うが、これは２つの事項（「英語のテスト ｙ 」「数学のテスト ｘ 」として、グラフ化したもので一次関数のグラフ（直線のグラフ）を描いている。（相関係数を実際に考えるとこんなにきれいに一直線に並ぶことはほぼないので、0.7 とか 0.2 とか-0.5 とかの散らばりを見せることになる。）

◇◇関数の式とは◇◇

例２：因数分解から二次関数の式を考えてみる

$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

- たとえば、$x = 1$ の場合　：　$1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$
  $(1 + 2)(1 + 1) = 6$
- たとえば、$x = 2$ の場合　：　$2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$
  $(2 + 2)(2 + 1) = 12$
- たとえば、$x = 3$ の場合　：　$3^2 + 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$
  $(3 + 2)(3 + 1) = 20$

※ xの値が変わる（＝変数）と、答えが変わる（＝変数）→ y と置いてみよう

$$y = x^2 + 3x + 2$$
$$y = (x + 2)(x + 1)$$

この式も、x の変化と y の変化にも一定の法則が見られるので関数といえる。

$y = x + 10$　（一次関数）　→　さっき相関係数の例で見た直線のグラフのやつ。
$y = x^2 + 3x + 2$（二次関数）　→　**高認ではこちらがメイン**

※ 「一次」「二次」の違いは、式の中の最大次数で変わる（ x とか x^2 とか）。なので、式の中の最大次数が x^3 のときは「三次関数」というし、 x^4 のときは「四次関数」という。そして、それぞれのグラフの形も決まった特徴がある（一次関数が「直線」、二次関数が「放物線」のように）。

6-2

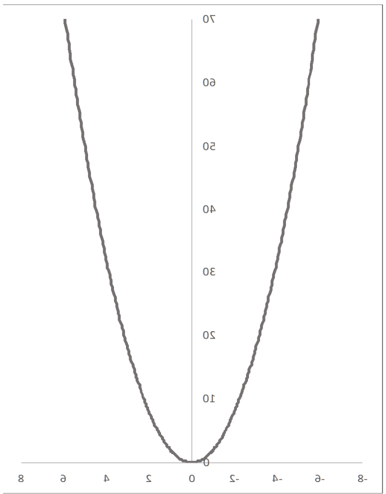
◇◇二次関数のグラフの形◇◇

二次関数の式をどんな数を当てはめても成り立つように $y = ax^2 + bx + c$ とする（一般式と言ったりする)。「 y と x 」の変数とはまた違う次元で、「 a と b と c 」も変数という事になるので慣れないと頭がこんがらがる。これはおいおい慣れていけば OK。

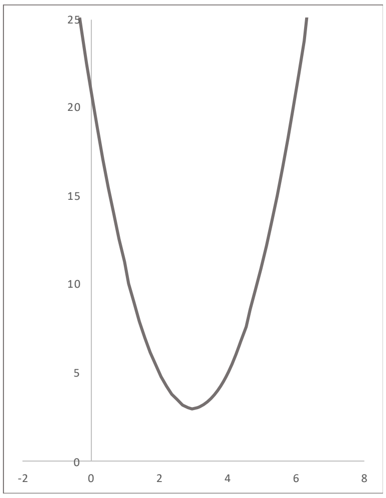
ともかく、**二次関数のグラフの形は、$\boldsymbol{ax^2}$の部分で判断する。**

● a の値が正（プラス）のとき

$y = ax^2$ とか $y = a(x - ■)^2$ +△ の場合、グラフの形は下に凸の形になる。

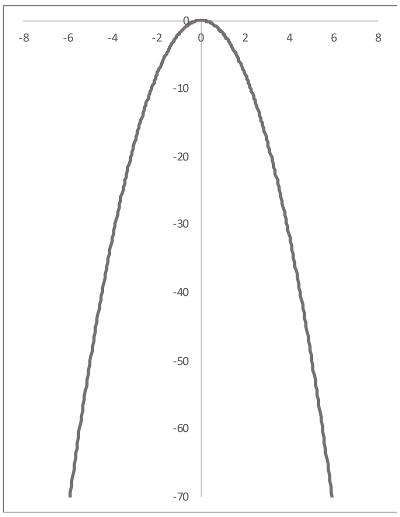


とか

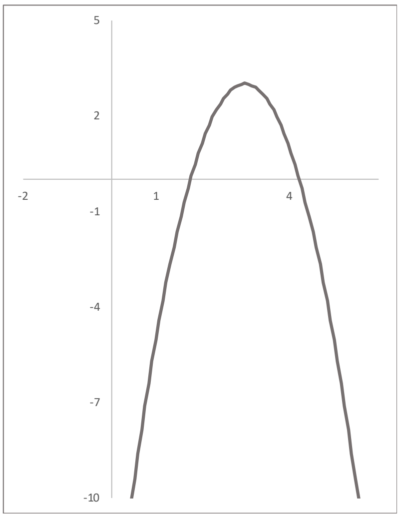


● a の値が負（マイナス）のとき

$y = ax^2$ とか $y = a(x - ■)^2$ +△ の場合、グラフの形は上に凸の形になる。

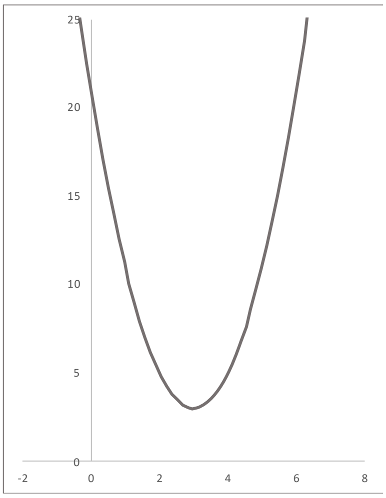


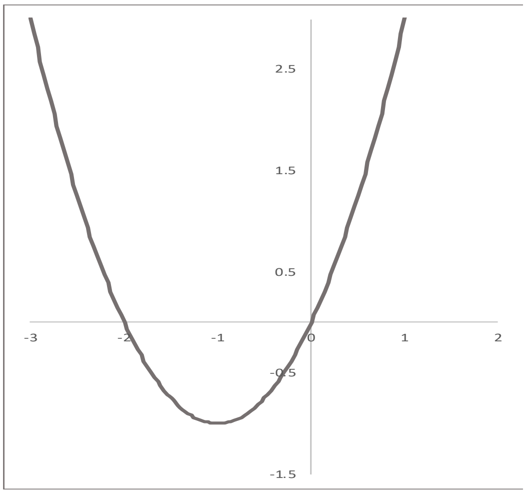
とか



● a の値（絶対値）が大きかったり、小さかったりすると

a の値が大きいと、とがり具合がきつくなる。なので、下の２つのグラフでは左側の方が右側よりも a の値が大きくなる（左側が３で、右側が１とか）。a の値がどんどん小さくなっていくと、グラフがどんどん広がっていき、－になると、上に凸の方になって、上に向かってどんどん尖っていくことになる。



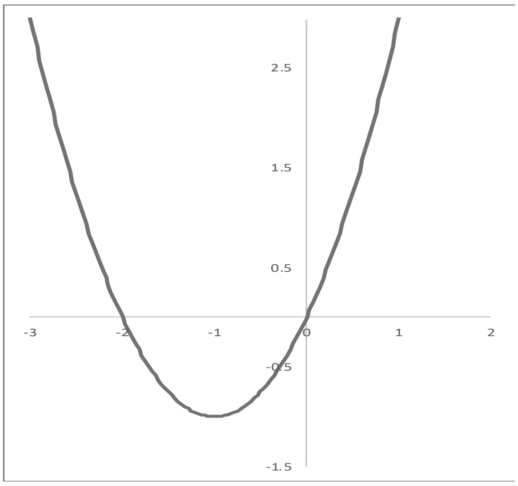
とか


6-3

◇◇頂点を求める◇◇

一次関数はただただ一直線なのでつかみどころがないが、二次関数は放物線なので基準となる点のようなもの（＝頂点）がある。なので、二次関数の問題を解くにあたって、頂点を把握することは重要。

頂点の出し方 パターン１　グラフを見て解く



（手順 1）このグラフは x 軸と、−２ ，０で交わっているので、
頂点の x 座標はその真ん中の-1。

※ 二次関数のグラフは放物線なので、頂点のところで縦に折り曲げると左右はぴったり一致する（＝「線対称」という）。頂点を基準にして左側の形と右側の形は鏡に映ったように全く同じ形になる。なので、同じ高さ（今回の場合は x 軸）で x 座標の値が分かると、そのちょうど真ん中が頂点の x 座標になる。

（手順２）このグラフの二次関数の式が分かっているのであれば、その式の x に先ほど分かった値 −1 を入れて計算すると、頂点の y 座標の値が分かる。

※ 高卒認定の場合、x 座標の −1 からグラフ上の −1 の長さが分かったので、その長さで y 座標がどれぐらいの長さかがだいたい分かる。（高卒認定の場合、答えがマークシートで「1 ケタの数字」とかが分かるので、だいたいででも答えは出たりする）

頂点の出し方 パターン２　頂点がわかる式が書かれている

頂点が一発で分かる式は例えばこんな式（標準式と言ったりする）。

$$\boldsymbol{y = (x-2)^2 - 4}$$

これは、（　）にくくられている x のところに -2 、余っているところが -4 なので、-2 は x に関係していて、余った -4 は y に関係すると予測を立てられる。

高卒認定の場合は答えの形が

$(x, y) = ($ア$,$ イウ$)$

とかになってるなら、(x, y)にそれぞれの数字を当てはめると $(-2, -4)$ なので、無理やり答えの形に当てはまるように、$(2, -4)$ とすれば答えは一応出る。

普通に解くには、x の方は $(x-2)$ を最小にすればよいので（２次方程式：$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)=0$ の解き方と同じように）符号を逆にして 2 とする。後ろの -4 はそのまま y 座標で使う。よって、$(2, -4)$ が答えになる。

頂点の出し方 パターン３　平方完成

この方法は難しいので、やる気のある方は「平方完成」で調べてみてください。（というか

別のブログ記事で書いたのでそちらを見てみてください）

平方完成とは $y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x - ■)^2 +△$ に変形すること。

6-4

◇◇「点(x, y)を通る」問題◇◇

点(x, y)を通る ＝ 代入すると式が成立する。

考え方（復習）

・$y = x^2 + 3x + 2$ で、$x = 1$ のとき $y = 6$ になる

ということは逆に言うと…

・$y = x^2 + 3x + 2$ の式に、$x = 1,\quad y = 6$を代入しても成り立つ

ということは…

・$y = x^2 + 3x + 2$ のグラフは、点$(1, 6)$ を通るということになる。

なので、「点(x, y)を通る」が出てきたら、その数字を式に代入してあげるとだいたい良い感じに事が進む。

例題

令和元年度第１回

大問３(2)

【 https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/detail/__icsFiles/afieldfile/2019/09/03/R1_1420167_07.pdf 】

類題

（1）

平成 30 年度第２回

大問３(2)

【 https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/detail/__icsFiles/afieldfile/2019/01/25/1411253_07.pdf 】

（2）

平成 29 年度第２回

大問３(2)

【 https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/detail/__icsFiles/afieldfile/2018/05/25/1398423_07.pdf 】

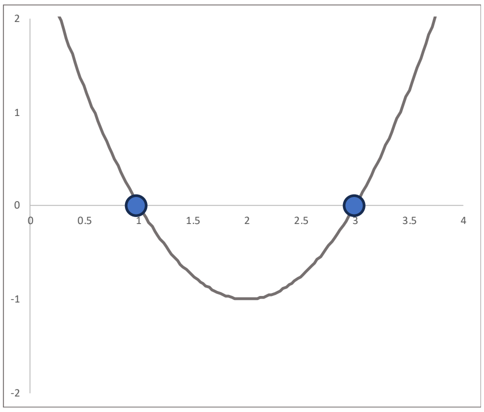
6-5

◇◇x軸との共有点◇◇

x軸との共有点も、考え方としては「点(x , y)を通る」と考え方の根っこは同じ。そして、ある関数とx軸（$y=0$）との共有点ということが分かれば、ある関数と別の関数との交点などを求めたりも出来るようになる。

・x軸との共有点

→ 関数（$y=x^2+5x+6$）のグラフがx軸と交わっているところ



→ x 軸と交わる ＝ $y=0$ との交点 ＝ y が０になるときの x を見つける
（$0=x^2+5x+6$）

→ 因数分解できれば解ける （解の公式でももちろん良い）

例題 $y=x^2-2x$とx軸の共有点の座標を求めよ
→ $y=0$

① $y=0$ なのでｙ を ０ にする ： $x^2-2x=0$

② 因数分解できそうなので因数分解 ： $x(x-2)=0$

③ 普通に２次方程式を解く ： $x=0,2$

④ ｘ が ０ と ２ のときの、ｙ を出す ： $y=x^2-2x$ に $x=0,2$ を代入

$(x,y)=(0,0),(2,0)$

類題

（１）$y=x^2-4x+4$ とx軸の共有点を求めよ

（２）$y=2x^2-5x+2$ とx軸の共有点を求めよ